ОТЗЫВ

официального оппонента о диссертации Трещёва Валентина Сергеевича «Теоремы о возмущениях векторно накрывающих отображений в исследовании неявных дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом», представленной на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 - дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

Диссертация В.С. Трещёва посвящена вопросам разрешимости задачи Коши и краевых задач для неявных (то есть не разрешенных относительно производной) дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. Актуальность этой тематики обусловлена сложностями исследования неявных уравнений, а также важными приложениями и в самой математике, и в механике, физике, технике. Как известно, для обыкновенного дифференциального уравнения $f(t,x,\dot{x})=0$ "даже при весьма простом виде функции f дело может обстоять существенно иначе, чем для явного дифференциального уравнения" (Э. Камке. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям). Для таких уравнений не существует методов исследования столь же общих, как и для разрешенных относительно производной уравнений. Дополнительные трудности доставляет наличие отклонения (в частности, запаздывания) в аргументе неизвестной функции. К исследованию разрешимости неявных дифференциальных уравнений не удается, например, применить известные теоремы о неподвижных точках.

Новые возможности для исследования неявных уравнений даёт интенсивно развивающаяся в последние годы благодаря работам Е.Р. Авакова, А.В. Арутюнова, Б.Д. Гельмана, А.В. Дмитрука, Е.С. Жуковского, С.Е. Жуковского, А.Д. Иоффе, А.А. Милютина, Б.Ш. Мордуховича, В.В. Обуховского, Н.П. Осмоловского теория накрывающих (также называемых метрически регулярными) отображений. В недавних работах Е.Р. Авакова, А.В. Арутюнова, Е.С. Жуковского, С.Е. Жуковского, Ф.Л. Перейра, Е.А. Плужниковой на основании результатов о точках совпадения накрывающего и липшицева отображений и результатов о нелинейных липшицевых возмущениях накрывающих отображений исследованы неявные дифференциальные уравнения. Использовавшиеся в этих работах методы в диссертации распространяются на дифференциальные уравнения с отклоняющимся аргументом. При этом автором применяются утверждения о векторно накрывающих отображениях, более эффективные в случае систем уравнений и дающие более точные покомпонентные оценки решений. Применение именно таких результатов вполне оправдано, так как краевая задача даже для скалярного уравнения уже является системой двух уравнений: дифференциального уравнения и краевого условия. Автор предлагает не определять метрику в соответствующем такой системе произведении пространств измеримых функций и конечномерного пространства, а рассматривать в нем векторнозначную метрику. Для реализации этой идеи в диссертации не только используются известные утверждения о возмущениях векторно накрывающих отображений, но и получены новые утверждения – условия непрерывной зависимости от параметров решений систем уравнений с накрывающими отображениями. Этот результат, представляющий несомненный самостоятельный интерес, применим к системам дифференциальных, интегральных и разностных уравнений.

Перейдем к более подробному изложению содержания работы.

Диссертация объемом 94 страницы состоит из введения, двух глав, разделенных на параграфы и списка литературы. Для удобства чтения приведен перечень используемых в диссертации обозначений.

Во введении обосновывается актуальность темы, определяется цель исследования, приводится обзор работ, касающихся темы диссертации, кратко сформулированы основные результаты диссертации, описана их новизна и научное значение.

Первая глава состоит из трех параграфов. В § 1.1 приводятся определения необходимых понятий, прежде всего, свойств накрывания, векторного накрывания отображений и их распространений. В § 1.2 приведены две теоремы: утверждение об условиях устойчивости свойства векторного накрывания к липшицевым возмущениям, полученное Е.С. Жуковским, и утверждение о непрерывной зависимости от параметров решений систем операторных уравнений с векторно накрывающими отображениями, полученное автором диссертации. В § 1.3 найдены условия векторного накрывания оператора Немыцкого, действующего в пространствах измеримых существенно ограниченных функций. Полученная здесь теорема отличается от результатов других авторов о накрывании оператора Немыцкого не только тем, что в диссертации рассмотрен векторный случай, но и тем, что используется более "тонкое" локальное свойство накрывания на заданной совокупности из пространства $X \times R^n$. При доказательстве этого утверждения существенно используются методы многозначного анализа.

Результаты первой главы создают основу для исследования систем неявных дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом, которое представлено во второй главе. Рассматриваемая здесь система дифференциальных уравнений, начальных и краевых условий записывается в виде системы операторных уравнений в произведении пространств $L_\infty^m \times R^n$ относительно неизвестного $(\dot{x}, x(a))$. Результаты первой главы об операторе Немыцкого позволяют определить матрицу накрывания соответствующего отображения, а утверждения о накрывающих отображениях – получить условия существования решений и исследовать их свойства.

Вторая глава состоит из двух параграфов. В § 2.1 исследуется задача Коши для системы неявных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом при достаточно общих предположениях на входящие функции (порождающая эту систему функция $f: [a, b] \times R^n \times R^n \to R^m$ удовлетворяет условиям Каратеодори, условию Липшица по второму аргументу и обладает свойством локального накрывания на некоторой совокупности по третьему аргументу, запаздывание задано произвольной измеримой функцией). В пункте 2.1.1 доказаны утверждения о разрешимости и продолжении решения, получены оценки решений. В пункте 2.1.2 доказано утверждение о непрерывной зависимости от параметров решений задачи Коши. Здесь рассмотрена последовательность систем дифференциальных уравнений с запаздыванием, порожденных функциями $f^l: [a, b] \times R^n \times R^n \to R^m$, $l = 1, 2, \ldots$, получены условия сходимости решений к заданной абсолютно непрерывной функции.

В § 2.2 для системы неявных дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом исследуется краевая задача с условиями вида:

$$g_i\big(x_1(a), \ldots, x_n(a), x_1(b), \ldots, x_n(b)\big) = \Delta_i, \;\; i = \overline{1, m}. \qquad (2.2.2)$$

В пункте 2.2.1 получены условия разрешимости данной краевой задачи и даны покомпонентные оценки расстояния от заданной функции до решения. В заключительном пункте 2.2.2 доказана теорема о непрерывной зависимости решений краевой задачи от параметров.

Наряду с приведенными теоретическими результатами отметим несколько интересных примеров: в примере 1.1.1 определяется матрица накрывания действующего в R^2 отображения, которое по каждой компоненте не является накрывающим; в примере 2.2.1 исследуется краевая задача для системы двух неявных дифференциальных уравнений с запаздыванием.

Основными результатами диссертации являются:

1. Условия непрерывной зависимости от параметров решений систем операторных уравнений с векторно накрывающими отображениями в произведениях метрических пространств;
2. Условия векторного накрывания оператора Немыцкого в пространствах измеримых существенно ограниченных функций с векторнозначной метрикой;
3. Условия существования и оценки компонент решений задачи Коши для систем неявных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом;
4. Условия непрерывной зависимости от параметров решений задачи Коши для систем неявных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом;
5. Условия существования и оценки компонент решений краевых задач для систем неявных дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом;
6. Условия непрерывной зависимости от параметров решений краевых задач для систем неявных дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом.

Результаты являются новыми, имеют несомненное теоретическое и прикладное значение, основаны на оригинальных подходах, подробно доказаны и обоснованы. Результаты диссертации представляют интерес для теории дифференциальных уравнений, теории управления, функционального анализа, а также для приложений в механике, в математических моделях технических систем.

В качестве недостатков работы можно привести следующие замечания:

1. На стр. 32 отмечено, что свойство α-накрывания равносильно соотношению (1.1.1), а свойство условного α-накрывания – соотношению (1.1.2). Следовало либо доказать этот факт, либо сослаться на соответствующую работу. Аналогичное замечание относится к обсуждению на стр. 36, 37 равносильности соотношения (1.1.7) определению векторного

накрывания отображением Ψ множества W на совокупности $\mathfrak{B}(u_0, R, u)$; необходимо было дать доказательство этого утверждения.

2. При доказательстве теоремы 2.1.1 (см. стр. 59) отмечено, что отображение $\Phi_c(\omega\,,\,\cdot\,)$ удовлетворяет условию Липшица с матрицей B; при доказательстве теоремы 2.2.1 (см. стр. 77) утверждается, что отображение $\Phi(\omega^I\,,\,\cdot\,, \omega^{II})$ удовлетворяет "векторному" условию Липшица. Точного определения этого понятия в диссертации нет, следовало его привести и сравнить с предположением *(b)* теоремы 1.2.1 (очевидно, условие *(b)* более слабое, чем "вектороное" условие Липшица).

3. Рассмотренная в § 2.2 краевая задача содержит условие вида $g(x(a), x(b)) = \Delta$ с функцией g, векторно накрывающей по первому аргументу и липшицевой по каждой компоненте второго аргумента. В доказательствах теорем этого параграфа краевое условие преобразуется к виду $g\left(x(a), x(a) + \int_a^b \dot{x}(s)ds\right) = \Delta$. Можно было рассмотреть более общее краевое условие вида $\tilde{g}\left(x(a),\ \int_a^b \vartheta(s)\,\dot{x}(s)ds\right) = \Delta$, где функция ϑ суммируема, а функция $\tilde{g}$, как и g, векторно накрывает по первому аргументу и липшицева по каждой компоненте второго аргумента. Доказательства всех результатов бы не изменились, а такое условие охватывает больший класс краевых задач (например, в условие можно включить значения и в промежуточных точках $x(c),\ c \in [a, b]$).

Отмеченные недостатки не влияют на общую положительную оценку диссертационной работы.

Изложение ясное, четкое. Доказательства подробные, математически строгие. Текст диссертации тщательно выверен, практически не содержит опечаток, неточностей (мною замечено лишь отсутствие скобок в ссылке (1.3.9), стр. 50 и вместо точки после формулы (2.1.7) поставлена точка с запятой, стр. 58).

Результаты диссертации своевременно опубликованы в одиннадцати работах, в том числе восемь статей опубликовано в журналах, входящих в перечень рецензируемых журналов и изданий, рекомендованный ВАК РФ, в соавторстве с научным руководителем опубликована одна монография. Работа прошла апробацию на ряде конференций и семинаров. Автореферат полно и правильно отражает содержание диссертации.

На основании изложенного считаю, что диссертационная работа Валентина Сергеевича Трещёва удовлетворяет всем требованиям п. 9

Положения о порядке присуждения ученых степеней, предъявляемым к кандидатским диссертациям, а ее автор заслуживает присуждения ему ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление.

Официальный оппонент:
доцент кафедры высшей математики
Воронежского государственного
педагогического университета,
доктор физико-математических наук,
доцент С.В. Корнев

Корнев Сергей Викторович
394043, Воронежская область, г. Воронеж, ул. Ленина, дом 86,
Воронежский государственный педагогический университет,
кафедра высшей математики
Тел: +7 (473) 255-36-63
E-mail: kornev_vrn@rambler.ru

Подпись Корнева С. В. заверяю
Начальник управления кадров
ФГБОУ ВО «ВГПУ»
И.С. Полякова
«01» декабря 2017 года